



DOI: 10.21005/pif.2018.35.B-03

## **SELECTED FACTORS AFFECTING THE ACCURACY OF USABLE AREA MEASUREMENTS FOR ROOMS WITH IRREGULAR SHAPES**

### **WYBRANE CZYNNIKI WPŁYWAJĄCE NA DOKŁADNOŚĆ POMIARÓW POWIERZCHNI UŻYTKOWEJ POMIESZCZEŃ O NIEREGULARNYCH KSZTAŁTACH**

**Marek Kurnatowski**  
mgr inż.

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie  
Wydział Budownictwa i Architektury  
Katedra Budownictwa Wodnego

#### **ABSTRACT**

The article takes a closer look at the problem of the accuracy of measuring the usable areas of premises, especially when measuring irregular-shaped rooms. The standards do not specify measurement technologies that should be implemented to meet the accuracy requirements. The author has done research to determine the factors that negatively affect the measurement result and proposes a methodology to prevent them.

Key words: area measurement accuracy, irregular-shaped rooms, usable area measurement.

#### **STRESZCZENIE**

Artykuł ma na celu przybliżenie problemu dokładności pomiaru powierzchni użytkowej lokali, zwłaszcza przy pomiarach pomieszczeń o nieregularnych kształtach. Przepisy prawa regulujące te czynności nie określają technologii pomiarowych, które należy wdrożyć aby spełnić założenia dokładnościowe. Autor przeprowadził badania, w których podejmuje próbę określenia czynników wpływających negatywnie na wynik pomiarów oraz proponuje metodologię mającą na celu ich zapobieganie.

Słowa kluczowe: dokładność pomiaru powierzchni, pomiar powierzchni użytkowej, pomieszczenia o nieregularnych kształtach.

## 1. INTRODUCTION

In times of growing demand for new living spaces, developers and designers often decide on non-standard layouts of rooms in new segments. This kind of approach is often determined by the desire to maximize the usable floor area per investment plot and by spatial development conditions. It does not look already like a glaring error to see round walls or surfaces that do not keep the right angles, because it is made intentionally. In the case of buildings whose faces run along the road curvature, it should be assumed that the rooms inside are not typical rectangles. This kind of layouts causes technical problems with presale usable floor area measurement and its result become the basis for local fees and taxes. Developers' agreements usually contain clauses about possible discrepancies between the real and designed area, but customers are charged for the real one. Any discrepancies, regardless of whether they are within the contractual limits, should be settled. With the permanently increasing unit prices of real estates, the accuracy of measuring the usable floor area becomes crucial. When it comes to measurement, there are several important aspects that should be considered.

## 2. THE STANDARD VERSUS ACCURACY

The standards for measuring the usable floor area in Poland (obligatory PN-ISO 9836:2015-12 and archival, but commonly used PN-ISO 9836: 1997) gives one value in the context of area measurement. Clause 5.1.1.2 reads: *The floor area is given in m<sup>2</sup> with an accuracy of two decimal places* [3,4]. This record applies among others to usable floor area. Contrary to common opinion, those standards do not specify the accuracy of linear dimensions, often defined as 0.01 m. They also do not say anything about the measurements techniques. It should be assumed that measurement technologies are applied in compliance with the accuracy requirements of the final result. Incorrectly collected data will cause errors in area estimation, even though it is calculated automatically using common software. Practice shows that the area measurement is most often carried out by measuring the length of the walls with linear gauges or manual laser range finders. The problem is that the accuracy of the linear measurement at the level of 0.01 m does not ensure the accuracy of the area measurement at the level of 0.01 m<sup>2</sup>. The larger the room to inventory is, the larger the area measurement error should be expected.

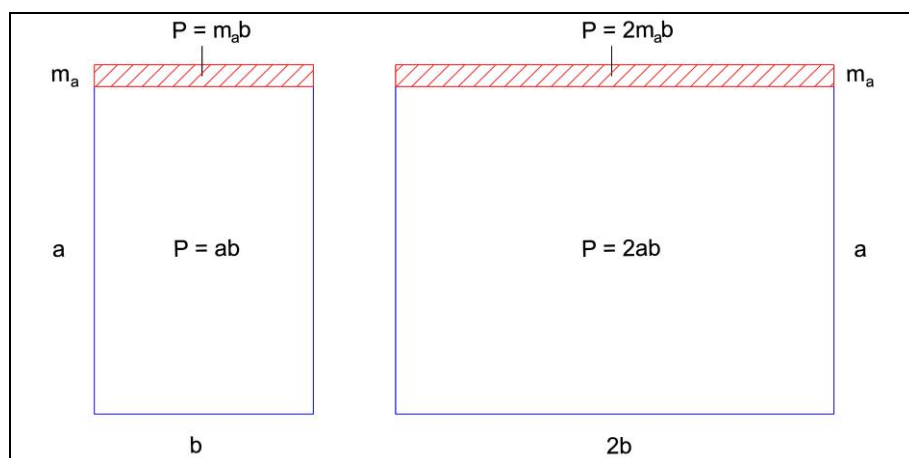


Fig. 1. Illustration of the influence of room dimensions on the accuracy of its area calculation. Source: own elaboration

Ryc. 1. Ilustracja wpływu wymiarów pomieszczenia na dokładność obliczenia jego powierzchni. Źródło: opracowanie własne

This phenomenon is shown in fig. 1. The hatched area is the area error that will be made, when one of the linear dimensions is biased with an linear error  $m_a$ . For a double-wide room the error of determining the area also doubles and it was assumed that only one side of the rectangle is biased with a linear measurement error, which does not happen, of course, in reality.

To calculate the accuracy of the area determined on the basis of linear measurements of any figure, the law of propagation of uncertainty [6, p. 153] should be applied. If the area of a figure can be expressed by the function of independent variables  $a, b, c, \dots, n$  (here linear dimensions), then the standard error (standard deviation) of this area (its accuracy) is expressed by the formula:

$$m_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 m_c^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2 m_n^2}$$

where:  $f$  – function describing the area with variables  $a, b, c, \dots, n$ ,  $m_f$  – standard error of the function (area),  $m_a, m_b, m_c, \dots, m_n$  – standard errors of variables  $a, b, c, \dots, n$ . Considering a typical case – a rectangular room, there are two linear dimensions needed to calculate the area with well-known formula. It should also be assumed that both linear dimensions are measured with the same accuracy, as they are usually performed by the same person, with the same equipment and under identical conditions. With such assumptions the formula describing the accuracy of the area determination is transformed to:

$$m_f = m\sqrt{a^2 + b^2}$$

where:  $m_f$  – standard error of rectangle area,  $m$  – standard error of length measurement for rectangle sides,  $a, b$  – measured lengths of rectangles sides. According to recently applicable law [5], the minimum width of the bedroom should be 2.20 m. Table 1 shows the values of area measurement accuracy of rectangular rooms in which one of the sides is at least 2.20 m long. It contains the accuracy of the area measurement for rooms with selected dimensions (from 2.25 m to 5.50 m) assuming that the measurement error of each length is 0.01 m. It can be noted that the accuracy of the area calculation decreases with the increase of one of the sides (not the area itself). In addition, it should be noted that the smallest error for determining the area is 0.03 m<sup>2</sup>.

To achieve accuracy at the assumed level of 0.01 m<sup>2</sup>, a much higher accuracy of measuring distances should be ensured. Its value depends on the dimensions of the room. For rooms with dimensions of 5,5 m x 5,5 m, the error grows up to 0.08 m<sup>2</sup>. With average prices of 1 square meter of new flats in the largest Polish agglomerations, this value converts into approximately PLN 500 for one room only. For an average sized room 3 m x 4 m the error of its area estimation is 0.05 m<sup>2</sup> when measuring the length with an accuracy of 0.01 m. In order to obtain a result according to the standard, a measurement of the length with an accuracy of 2 mm should be made, and this may already be a technical problem. The fact that a measuring tool shows results with 1 mm accuracy does not mean that the survey accuracy meets that value. There is a long list of factors influencing the result, like temperature and humidity in the room, tape tensioning force, wall surface roughness or correctness of applying the beginning or end of the measure, regardless of whether a measuring tape or electronic device is applied.

Tab. 1. Standard error values of area calculations for rectangles with dimensions from 2.25 m to 5.50 m and standard linear error 0.01m. Values of area errors are given in m<sup>2</sup>. Source: own elaboration

		Length of a rectangle base "a" [m]													
		2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00	5,25	5,50
Length of a rectangle base "b" [m]	2,25	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06
	2,50	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06
	2,75	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06
	3,00	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06
	3,25	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06
	3,50	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07
	3,75	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07
	4,00	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07
	4,25	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07
	4,50	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
	4,75	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
	5,00	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
	5,25	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,08
	5,50	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08

It should also be explained how to interpret the term "measurement accuracy". The standard measurement error can be identified with the standard deviation, which means that the probability of exceedance for this value during the measurement equals approximately 1/3. Statistically, however, 5% of the measurements are biased with more than double standard error [1, p. 58]. Therefore, it should not be assumed that the measurement error cannot be exceeded in any way.

### 3. IRREGULARLY SHAPED ROOMS

The accuracy of the area estimation is more complicated in the case of irregular shaped rooms. An example of a building with irregular rooms is shown in fig. 2. The first problem which the person performing the measurement meets with is the inability to use formulas to calculate areas of basic figures. The shape should be divided into figures whose areas can be calculated using the measured linear dimensions. The second problem is the proper representation of the real shape by the selected figure. In the case of incorrect selection of the figures representing the measured shape, the error due to the incorrectness of the figures additionally decreases the accuracy of the area measurement. The impact of such an error is difficult to estimate, which is shown at the example below. In an apartment located on the curved part of a building a corridor's area was measured. The shape was divided into trapeziums. Transforming the formula for the standard error of area, we obtain its form for trapezium:

$$m_f = \frac{1}{2} m \sqrt{2h^2 + (a + b)^2}$$

where:  $m_f$  – standard error of trapezium area,  $m$  – standard error of length measurement for trapezium linear dimensions,  $a$ ,  $b$  – measured lengths of trapezium bases,

$h$  – measured trapezium height. Fig. 3 presents the shape of a corridor in an apartment with an curvilinear outline. The contour on the top is the shape of the corridor obtained as a result of geodetic survey - for the purposes of calculations it was assumed that in comparison to other methods of this shape was not biased with any error. The dots indicate the places selected for measurement. The next contours show successive approximations of the corridor shape - T-1 approximates it with one trapezium, T-2 – two and T-3 – three.

Fig. 2. Example of a building with a curvilinear outline and a corridor inside it. Source: own materials

Ryc. 2. Przykład elewacji budynku zbudowanego po łuku oraz korytarza w jego wnętrzu. Źródło: materiały własne

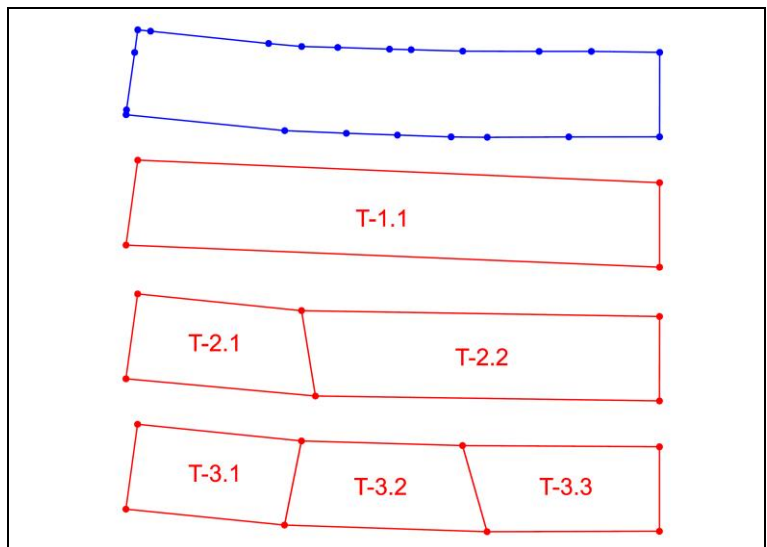


Fig.3. Successive approximations with trapeziums of the real shape of the corridor. Source: own elaboration.

Ryc. 3. Kolejne przybliżenia trapezami rzeczywistego kształtu korytarza. Źródło: opracowanie własne.

Table 2 presents the results of a corridor area measurement with manual laser range finder that was used to obtain linear dimensions only. It contains, in addition to the measured values, a calculated error of measuring the entire corridor area. It is not an arithmetic sum of errors for individual trapeziums, since it was calculated as an error of a sum of components with different measurement accuracy. The table also presents the results of geodetic survey and independent measurement made by the developer. It is worth noting that the most accurate approximation is the division of the area into three trapezoids. This is the nearest result to the geodetic survey one and also has the highest measurement

accuracy. The division of area into a larger number of elements is economically unjustified, because the increment of precision is small and the workload is comparable to the organization of geodetic survey. However, it should be considered that the accuracy of measuring the area of non-rectangular figures is also influenced by the appropriate selection of wall breakpoints and residual non-parallelism of the walls adopted for calculations to be parallel. The non-parallelism of the opposite walls of 1 degree increases the space between them by 5 cm at a distance of 3 meters. In the context of proper area measurements, this is an enormous difference, and 1 degree is such a small value that such non-parallelism can be unnoticeable with the naked eye. In order to avoid errors caused by non-parallel walls, it is absolutely necessary to measure the heights of the trapezoid at least twice - at the end and the beginning of the bases, and even more frequently. The average of two values will be sufficient to consider the figure to be trapezium with an average height. This assumption will reduce the impact of non-parallel walls on the result.

Tab. 2. Results of measuring the arch-shaped corridor's area with various methods. Source: own elaboration

Trapezoid	a [m]	b [m]	h [m]	P [m <sup>2</sup> ]	m <sub>P</sub> [m <sup>2</sup> ]
<b>T-1.1</b>	9,33	9,54	1,52	<b>14,34</b>	<b>0,095</b>
<b>T-2.1</b>	2,94	3,40	1,52	4,82	0,033
<b>T-2.2</b>	6,40	6,15	1,52	9,54	0,064
<b>Sum</b>				<b>14,36</b>	<b>0,072</b>
<b>T-3.1</b>	2,94	2,85	1,52	4,40	0,031
<b>T-3.2</b>	2,88	3,62	1,52	4,94	0,034
<b>T-3.3</b>	3,52	3,08	1,52	5,02	0,035
<b>Sum</b>				<b>14,36</b>	<b>0,058</b>
<b>Geodetic survey</b>	-	-	-	<b>14,38</b>	-
<b>Developer's survey</b>	-	-	-	<b>14,41</b>	?

#### 4. OTHER FACTORS AFFECTING THE AREA MEASUREMENT

The correct interpretation of slight bending of the walls is the problem of minor importance. If there is no chance to see the bend point clearly enough, a mistake in determining the position of it by several centimeters can occur. However, this is not a big loss, because the next linear dimension will be measured from the incorrectly set point and the sum of the lengths of the wall segments will match. This phenomenon is illustrated in fig. 4. The area filled with purple check is the real shape of the figure. As a result of incorrectly estimated bend points, the areas of two trapezoids were measured. Consequently, the green part of the figure was omitted, but an orange one was added, so that the total error was mutually compensated. Of course, the area error due to this phenomenon will be increased as the value of angle increases. The increase of the linear error of determining the apex of this angle will also negatively affect the total accuracy. However, it should be considered that when the wall bend is distinct, the estimation of its location is easier.

Regardless of the shape of the measured figures, the key factor in area determination accuracy is the accuracy of the measurement of linear elements. The desired value is expected to be a 2-millimeter error. In practice, it is impossible to ensure such an accuracy using a measuring tape, among others due to the extensibility of the tape or bending the tape in the corner where the length is read. A far better solution is to use manual laser range finder with high accuracy or to perform geodetic surveys. The accuracy of distance

measurement of 2 millimeters is some kind of standard for total stations nowadays. A separate issue is the unevenness of the plaster, especially just above the floor, and the standard requires that the wall spacing should be measured at this level [3,4]. Unfortunately, near various types of corners, plasters are not as even as in the central parts of the walls. Spacing should therefore be measured in various cross-sections, but each time at the floor level.

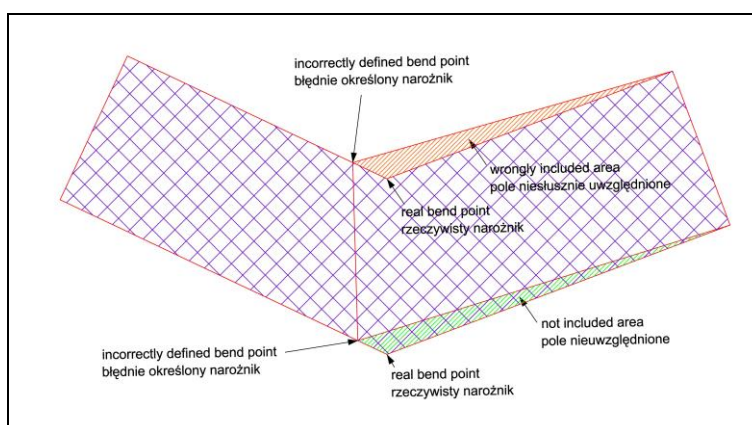


Fig. 4. Influence of a mistakenly recognized wall corner on the area measurement

Ryc. 4. Wpływ błędnie rozpoznanego narożnika ściany na pomiar powierzchni

## 5. SUMMARY

Although many cases of discrepancies between two measurements of the same usable area result from the interpretation of the standard, one must also be careful during the measurement itself. The most important factor affecting the accuracy of area measurement is the accuracy of the measurement of linear elements. The best solution to avoid mistakes due to incorrect estimation of the shape of an irregular figure is the use of geodetic measurements, preferably reflector total stations or laser scanning. Manual rangefinders with triangulation functions are also a good solution. Recommendations for performing measurements are presented in tables 3 and 4.

Tab. 3. Recommendations regarding the technology of measuring the usable space. Source: Own elaboration.

Action	Action's effect	Disadvantages of action
Reflector total station measurement	ensuring the highest accuracy of linear measurements	higher price of services, the need for two-people team
	obtaining directly XY coordinates of many points representing the measured shape, easy import to CAD application	the possibility to overlook hardly noticeable wall bending
	avoiding errors in the interpretation of the real shape of the figure	
Reflectorless total station measurement	avoiding errors in the interpretation of the real shape of the figure	not very accurate measurement of the corners due to the width of the laser beam, which does not reflect the characteristic points only [2 p. 299]
	obtaining directly XY coordinates of many points representing the measured shape, easy import to CAD application	the possibility to overlook hardly noticeable wall bending
Laser scanning	speed of data collection	high price of services and equipment

Action	Action's effect	Disadvantages of action
	additional data, e.g. regarding volume	complicated data processing
	obtaining the real shape of the room	
	great amount of measuring points, the possibility of easy filtration of erroneous measurements	
Manual rangefinder with triangulation mode	obtaining the area directly during measurements	hard to identify characteristic points remote from the rangefinder stand
		the possibility to overlook hardly noticeable wall bending
		errors in linear measurements due to inaccurate aiming
		lower accuracy comparing to geodetic works
		reduction of accuracy due to reflection from rough surfaces and from corners

Tab. 4. Recommendations for measurements of usable space with manual rangefinders and measuring tapes

Action	Action's effect	Threats
Ensuring the 2 mm accuracy of measurements of linear elements	ensuring the accuracy of area measurements at the level of 0.01 m <sup>2</sup> for the majority of inventory rooms	this accuracy may be insufficient for large rooms
		technically impossible to achieve in case of measuring tape
Ensuring equal conditions during the measurement (sunshine, humidity, temperature, dustiness)	increasing the accuracy of measurements of linear quantities	difficult to achieve at the construction stage
	easier identification of characteristic points to be measured	Moistened surfaces shorten the range of the instrument [2, p. 298]
Measurement of wall spacing in many cross-sections	increase of accuracy	possible errors when the gauge is not straight
	noticing residual or significant non-parallel walls	
Division of irregular figures into trapezoids or triangles	avoiding the mistake of assuming the shape of the figure	error in the interpretation of the break point results in the loss of the accuracy of the area measurement
	increasing the accuracy of area estimation	

## WYBRANE CZYNNIKI WPŁYWAJĄCE NA DOKŁADNOŚĆ POMIARÓW POWIERZCHNI UŻYTKOWEJ POMIESZCZEŃ O NIEREGULARNYCH KSZTAŁTACH

### 1. WPROWADZENIE

W czasach niesłabnącego popytu na nowe lokale mieszkalne deweloperzy i projektanci decydują się często na niestandardowe układy izb w nowych segmentach. Często jest to wymuszone chęcią maksymalizacji metrażu powierzchni użytkowej przypadającą na daną działkę inwestycyjną, a także uwarunkowaniami zagospodarowania przestrzennego. Ściany celowo poprowadzone bez zachowania kątów prostych, czy ściany łukowe nie wywołują już wrażenia rażących błędów wykonawczych. W przypadku budynków, których



lica biegną wzdłuż łuku drogi, należy założyć że pomieszczenia wewnątrz nie będą typowymi prostokątami. Takie układy izb powodują problemy techniczne przy inwentaryzacji powierzchni użytkowej lokalu, której wyniki stają się podstawą opłat i podatków lokalnych. Wprawdzie umowy deweloperskie zawierają najczęściej klauzule o możliwych rozbieżnościach między faktycznym a projektowym stanem, jednak klienci płacą za stan faktyczny i wszelkie rozbieżności, niezależnie, czy mieszczą się w widełkach umownych, należy rozliczyć. Przy nieustannie rosnących cenach jednostkowych nieruchomości dokładność pomiaru powierzchni staje się kluczowa. W przypadku wykonywania inwentaryzacji powierzchni trzeba pamiętać o kilku ważnych aspektach.

## 2. NORMA KONTRA DOKŁADNOŚCI

Normy pomiaru powierzchni użytkowej pomieszczeń (obowiązująca PN-ISO 9836:2015-12 oraz archiwalna, lecz powszechnie używana PN-ISO 9836:1997) podają jedną wartość w kontekście pomiaru powierzchni. Punkt 5.1.1.2 brzmi: *Pole powierzchni podaje się w m<sup>2</sup> z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku* [3,4]. Zapis ten dotyczy m.in. powierzchni użytkowej. Wbrew obiegu opinii normy te nie podają dokładności pomiarów liniowych, którą różne źródła określają jako 0,01 m. Nie mówią też nic o samej technice wykonywania pomiarów. Należy przy tym założyć, że technologie pomiarowe przyjmuje się tak, aby wynik końcowy spełniał założenia dokładnościowe. Niewłaściwie zebrane dane spowodują błędy w liczeniu powierzchni, pomimo, że jest ona wyliczana automatycznie za pomocą powszechnego oprogramowania. Praktyka pokazuje, że pomiar powierzchni najczęściej odbywa się za pomocą pomiaru długości ścian przyrządami liniowymi bądź dalmierzami ręcznymi. Problem w tym, że dokładność pomiaru liniowego na poziomie 0,01 m nie zapewnia dokładności pomiaru powierzchni na poziomie 0,01 m<sup>2</sup>. Im większe jest pomieszczenie podlegające inwentaryzacji, tym większy błąd pomiaru powierzchni należy się spodziewać. Zjawisko to ilustruje ryc. 1. Zakresowany obszar to błąd powierzchni jaki zostanie popełniony, gdy przy pomiarze prostokątnego obszaru jeden z wymiarów liniowych zostanie obciążony błędem  $m_a$ . Dla dwukrotnie szerszego pomieszczenia błąd określenia powierzchni rośnie także dwukrotnie, a dla potrzeb rysunku założono, że tylko jeden bok prostokąta jest obciążony błędem pomiarowym, co nie zdarza się oczywiście w rzeczywistości.

Aby obliczyć dokładność pola powierzchni określonego na podstawie pomiarów liniowych dowolnej figury należy skorzystać z prawa propagacji błędów średnich [6, str. 153]. Jeżeli pole powierzchni figury można wyrazić funkcją zmiennych niezależnych  $a, b, c, \dots, n$  (w tym przypadku wymiarów liniowych), to błąd średni tego pola (jego dokładność) wyraża się wzorem:

$$m_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 m_c^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2 m_n^2}$$

gdzie:  $f$  – funkcja opisująca pole powierzchni za pomocą zmiennych  $a, b, c, \dots, n$ ,  $m_f$  – błąd funkcji  $f$  (pola powierzchni),  $m_a$  – błąd pomiaru zmiennej  $a$ ,  $m_b$  – błąd pomiaru zmiennej  $b$ ,  $m_c$  – błąd pomiaru zmiennej  $c$ ,  $m_n$  – błąd pomiaru zmiennej  $n$ . Rozważając przypadek typowy, czyli pomieszczenie o kształcie prostokąta, do obliczeń wykorzystywane są długości dwóch boków  $a$  i  $b$ , a funkcją opisującą pole jest znany wzór na pole prostokąta. Należy też założyć, że oba wymiary liniowe są mierzone z jednakową dokładnością, jako że najczęściej wykonuje je ta sama osoba, tym samym sprzętem i w tych samych warunkach. Przy takich założeniach wzór opisujący dokładność wyznaczenia pola z wykorzystaniem dwóch boków przybiera postać:

$$m_f = m\sqrt{a^2 + b^2}$$

gdzie:  $m_f$  – błąd określenia powierzchni prostokąta,  $m$  – błąd pomiaru długości boków prostokąta,  $a$  i  $b$  – boki mierzonego prostokąta. Zgodnie z niedawno obowiązującym prawem [5] minimalna szerokość pomieszczenia sypialnego powinna wynosić 2,20 m. Analizując dokładności wyznaczenia pola powierzchni pomieszczeń prostokątnych w których jeden z boków ma długość przynajmniej 2,20 m, można otrzymać wartości przedstawione w tabeli 1. Zawiera ona dokładności pomiaru pola powierzchni dla pomieszczeń o wybranych wymiarach (od 2,25 m do 5.50 m) przy założeniu, że błąd pomiaru każdej z długości wynosi 0,01 m. Tabela pokazuje, że dokładność obliczenia powierzchni maleje wraz ze wzrostem jednego z boków (nie samej powierzchni). Ponadto, należy zwrócić uwagę, że najmniejsza występująca wartość błędu określenia powierzchni to 0,03 m<sup>2</sup>.

Tab. 1. Wartości błędów średnich obliczenia pola powierzchni dla prostokątów o wymiarach od 2.25 m do 5.50 m. Wartości błędów pól powierzchni podane są w m<sup>2</sup>, błąd liniowy przyjęto 0.01 m.

		Długość boku prostokąta "a" [m]														
		2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00	5,25	5,50	
Długość boku prostokąta "b" [m]	2,25	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06
	2,50	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06
	2,75	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06
	3,00	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
	3,25	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
	3,50	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07
	3,75	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07
	4,00	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07
	4,25	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07
	4,50	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
	4,75	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
	5,00	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
	5,25	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,08
	5,50	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08

Aby uzyskać dokładność na zakładanym poziomie 0,01 m<sup>2</sup>, należy zapewnić dużo wyższą dokładność pomiaru wielkości liniowych. Jej rząd wielkości zależy od wymiarów pomieszczenia. Dla pomieszczeń o wymiarach 5.5 m x 5.5 m błąd wzrasta do 0,08 m<sup>2</sup> co przy średnich cenach 1 metra kwadratowego nowych mieszkań w największych polskich aglomeracjach, przekłada się to na kwotę około 500 PLN dla jednej izby. Dla średniej wielkości pokoju o wymiarach 3 m x 4 m, błąd oszacowania jej powierzchni to 0,05 m<sup>2</sup> przy pomiarze długości z dokładnością do 0,01 m. Aby uzyskać wynik zgodny z normą, należy wykonać pomiar długości z dokładnością do 2 mm, a z tym może już być problem natury technicznej. Fakt, że przyrządy miernicze pokazują wynik pomiaru z dokładnością 1 mm nie oznacza, że sam pomiar jest wykonywany z takim błędem. Lista czynników wpływających na dokładność jest długa, jest nim między innymi temperatura i wilgotność pomieszczenia, siła naciągu taśmy, nierówności powierzchni ściany albo prawidłowe przyłożenie początku lub końca przymiaru, niezależnie, czy dysponuje się przymiarem wstęgowym czy elektronicznym.

Należy też wyjaśnić jak interpretować pojęcie „dokładność pomiaru”. Błąd średni pomiaru można utożsamiać z odchyleniem standardowym, co oznacza, że występuje prawdopodobieństwo około 2/3, że wartość ta nie zostanie przekroczona podczas pomiaru. Statystycznie jednak 5% pomiarów wykracza poza wartość podwójnego błędu średniego pomiaru [1, str. 58]. Nie należy więc przyjmować, że błędu pomiaru nie da się w żaden sposób przekroczyć.

### 3. POMIESZCZENIA O NIEREGULARNYM KSZTAŁCIE

Sprawa dokładności oszacowania powierzchni komplikuje się tym bardziej, gdy należy zmierzyć powierzchnię pomieszczeń o nieregularnym kształcie. Przykład budynku z oraz widok na jedno z jego nieregularnych pomieszczeń ukazuje ryc. 2. Pierwszym problemem z jakim się spotyka osoba wykonująca pomiar to brak możliwości zastosowania podstawowych wzorów na pola powierzchni. Kształt należy podzielić na figury, których pole może być obliczone przy użyciu zmierzonych wielkości liniowych. Drugi problem to odpowiednia reprezentacja faktycznego kształtu przez dobraną figurę. W przypadku błędnego doboru figur reprezentujących mierzoną powierzchnię, do błędu wyznaczenia powierzchni wynikającego z niedokładności pomiarów liniowych dochodzi dodatkowo błąd z tytułu błędnego dopasowania figur. Skalę takiego błędu trudno oszacować, ale analizując przykład pomiaru korytarza w mieszkaniu znajdującym się na łuku budynku. Kształt został podzielony na trapezy. Wykorzystując wzór na średni błąd wyznaczenia pola dla trapezu, uzyskamy jego postać:

$$m_f = \frac{1}{2}m\sqrt{2h^2 + (a + b)^2}$$

gdzie:  $m_f$  – błąd określenia powierzchni trapezu,  $m$  – błąd pomiaru długości wymiarów liniowych trapezu,  $a$  i  $b$  – podstawy mierzonego trapezu,  $h$  – wysokość trapezu. Ryc. 3 prezentuje kształt korytarza w mieszkaniu u łukowym charakterze. Najwyżej położona figura to kształt korytarza uzyskany w wyniku inwentaryzacji geodezyjnej – na potrzeby obliczeń przyjęto, że w stosunku do innych metod pomiaru jest to wynik bezbłędny. Kropki na obrysie figury wskazują miejsca wybrane do pomiaru. Kolejne figury poniżej obrazują kolejne przybliżenia kształtu korytarza – T-1 aproksymuje go jednym trapezem, T-2, dwoma a T-3 trzema. W wyniku pomiaru powierzchni metodą pomiaru elementów liniowych (dalmierz ręczny) uzyskano wyniki prezentowane w tabeli 2. Zawiera on oprócz mierzonych wielkości obliczony błąd pomiaru całej powierzchni korytarza. Nie jest on sumą arytmetyczną błędów poszczególnych trapezów, jako że został obliczony jako błąd sumy o składnikach o różnej dokładności pomiaru. W tabeli zamieszczono również wyniki pomiarów geodezyjnego oraz niezależnego pomiaru wykonanego przez dewelopera na potrzeby rozliczeń. Na uwagę zasługuje fakt, że najdokładniejszym przybliżeniem jest podział powierzchni na trzy trapezy. Jest on najbliższy wynikowi pomiarowi geodezyjnego a także wykazuje największą dokładność pomiaru. Podział powierzchni na większą liczbę elementów jest ekonomicznie nieuzasadniony, ponieważ zysk dokładnościowy jest niewielki, a nakład pracy znaczny, porównywalny ze zorganizowaniem pomiaru geodezyjnego. Należy jednak pamiętać, że na dokładność pomiaru powierzchni figur niebędących prostokątami ma też wpływ odpowiedni wybór punktów załamań ścian oraz szczytkowa nierównoległość ścian, przyjętych w trakcie obliczeń za równoległe. Nierównoległość przeciwległych ścian wynosząca 1 stopień powoduje zwiększenie światła między ścianami o 5 cm na odcinku 3 metrów. W kontekście prawidłowych pomiarów powierzchni to różnica kolosalna, a 1 stopień jest na tyle małą wartością, aby taka nierównoległość mogłaby być zauważona gołym okiem. Aby uniknąć błędów powodowanych nierównoległością ścian należy bezwzględnie wykonywać pomiar wysokości trapezu co najmniej dwukrotnie – na końcu i początku podstawy, a nawet częściej. Średnia z dwóch wartości

będzie wystarczająca, aby potraktować mierzoną figurę jako trapez o wysokości uśrednionej i tym samym zniwelować wpływ nierównoległości ścian na wynik.

Tab. 2. Wyniki pomiaru powierzchni łukowego korytarza różnymi metodami. Źródło: Opracowanie własne.

Trapez	a [m]	b [m]	h [m]	P [m <sup>2</sup> ]	mP [m <sup>2</sup> ]
T-1.1	9,33	9,54	1,52	<b>14,34</b>	<b>0,095</b>
T-2.1	2,94	3,40	1,52	4,82	0,033
T-2.2	6,40	6,15	1,52	9,54	0,064
<b>Suma</b>				<b>14,36</b>	<b>0,072</b>
T-3.1	2,94	2,85	1,52	4,40	0,031
T-3.2	2,88	3,62	1,52	4,94	0,034
T-3.3	3,52	3,08	1,52	5,02	0,035
<b>Suma</b>				<b>14,36</b>	<b>0,058</b>
<b>Pomiar geodezyjny</b>	-	-	-	<b>14,38</b>	-
<b>Pomiar dewelopera</b>	-	-	-	<b>14,41</b>	?

#### 4. INNE CZYNNIKI WPŁYWAJĄCE NA POMIAR POWIERZCHNI

Mniejszym problemem jest właściwa interpretacja punktów nieznaczących załamania ścian. Jeśli nie widać jednoznacznie załamania, można się pomylić w określeniu położenia o kilkanaście centymetrów. Nie jest to jednak duża strata, ponieważ kolejny wymiar zostanie pomierzony od błędnie wyznaczonego punktu i suma długości ścian będzie się zgadzała. Zjawisko to ilustruje to ryc. 4. Pole w kratkę to rzeczywisty kształt figury. W wyniku błędnie oszacowanych punktów załamania ścian zmierzono powierzchnie dwóch trapezów. W wyniku tego działania pominięto zakreśloną część figury u dołu rysunku, ale dodano zakreśloną część u góry, przez co ogólny błąd został wzajemnie zrekompenzowany. Sytuacja taka będzie miała miejsce przy niewielkich kątach załamania ścian. Oczywiście, błąd powierzchni z tego tytułu będzie się potęgował wraz ze wzrostem wartości tego kąta i wraz z błędem liniowym określenia jego wierzchołka. Należy jednak pamiętać, że gdy załamanie ścian staje się wyraźne, łatwiej oszacować jego położenie.

Niezależnie od kształtu mierzonych figur kluczowym czynnikiem kreującym dokładność powierzchni jest dokładność pomiaru elementów liniowych. Pożądaną wartością byłby błąd na poziomie 2 milimetrów. Uzyskanie takiej dokładności metodą pomiaru taśmą jest praktycznie niemożliwe, chociażby z uwagi na rozciągliwość przymiaru, czy zaginanie taśmy od strony gdzie odczytuje się długości. Zdecydowanie lepszym rozwiązaniem jest używanie dalmierzy ręcznych o wysokich dokładnościach albo wykonywanie pomiarów geodezyjnych. Dokładność pomiaru odległości dla tachimetrów na poziomie 2 milimetrów jest już pewnego rodzaju standardem. Osobną sprawą są nierówności tynków, zwłaszcza przy podłodze, a norma nakazuje, aby właśnie na tym poziomie mierzyć rozstawy ścian [3,4]. Niestety, przy różnego rodzaju narożnikach tynki nie są tak równe jak na środkach ścian. Rozstawy należy więc mierzyć w różnych przekrojach, jednak za każdym razem na poziomie podłóg.

## 5. PODSUMOWANIE

Pomimo że wiele przypadków rozbieżności między dwoma pomiarami tej samej powierzchni użytkowej wynika jednak z różnic w interpretacji zapisów normy, trzeba zachować też ostrożność przy samym pomiarze. Najważniejszym czynnikiem wpływającym na dokładność pomiaru powierzchni jest dokładność pomiaru elementów liniowych. Najlepszym wyjściem, aby uniknąć błędów z tytułu błędnego oszacowania kształtu nieregularnej figury jest zastosowanie pomiarów geodezyjnych, najlepiej z wykorzystaniem tachimetrów lustrowych lub skaningu laserowego. Można też wykorzystać ręczne dalmierze z funkcjami triangulacji. Zalecenia dotyczące wykonywania pomiarów prezentują tabele 3 i 4.

Tab. 3. Zalecenia dotyczące technologii wykonywania pomiarów powierzchni użytkowej. Źródło: Opracowanie własne.

Działanie	Uzyskane efekty działania	Wady działania
Wykorzystanie lustrowego pomiaru geodezyjnego	zapewnienie najwyższej dokładności pomiarów liniowych	wyższa cena usług, potrzeba pracy dwóch osób przy pomiarach
	uzyskanie bezpośrednio współrzędnych XY wielu punktów reprezentujących mierzony kształt, gotowych do wprowadzenia do programu CAD	możliwość przeoczenia trudno zauważalnych punktów załamań ścian
	uniknięcie błędów interpretacji kształtów figury	
Wykorzystanie bezlustrowego pomiaru geodezyjnego	uniknięcie błędów interpretacji kształtów figury,	niezbyt dokładny pomiar narożników z uwagi na szerokość wiązki lasera, która nie odbija się tylko od punktów charakterystycznych [2 str. 299]
	uzyskanie bezpośrednio współrzędnych XY gotowych do wprowadzenia do programu CAD	możliwość przeoczenia trudno zauważalnych punktów załamań ścian
Skaning laserowy	szybkość pozyskania danych	wysoka cena usług i sprzętu
	dodatkowe dane, np. dotyczące kubatury	
	uzyskanie prawdziwego kształtu pomieszczenia	skomplikowana obróbka danych po pomiarze
	bardzo duża liczba punktów pomiarowych, możliwość łatwej filtracji błędnych pomiarów	
Pomiar dalmierzem ręcznym z funkcją triangulacji	uzyskanie powierzchni bezpośrednio w trakcie pomiarów	problem z identyfikacją punktów charakterystycznych oddalonych od stanowiska dalmierza
		możliwość przeoczenia trudno zauważalnych punktów załamań ścian
		błędy wielkości liniowych z uwagi na niedokładne celowanie
		niższa dokładność niż w przypadku pomiarów geodezyjnych
		Obniżenie dokładności przez odbicie lasera od szorstkich powierzchni oraz od narożników

Tab. 4. Zalecane warunki wykonywania pomiarów powierzchni użytkowej dla pomiarów dalmierzami ręcznymi i przyrządami wstęgowymi

Działanie	Uzyskane efekty działania	Zagrożenia
Zapewnienie dokładno-	zapewnienie dokładności pomiaru powierzchni	dla dużych pomieszczeń dokład-

ści pomiarów elementów liniowych na poziomie nie przekraczającym 2 mm	na poziomie 0,01 m <sup>2</sup> dla większości inwentaryzowanych pomieszczeń	ność ta może być niewystarczająca
		praktycznie niemożliwe do osiągnięcia w przypadku pomiaru taśmą mierniczą
Zapewnienie jednokowych warunków podczas pomiaru (nasłonecznienie, wilgotność, temperatura, zapylenie)	podniesienie dokładności pomiarów wielkości liniowych	trudne do osiągnięcia na etapie budowy
	łatwiejsza identyfikacja punktów charakterystycznych podlegających pomiarowi	zawilgocone powierzchnie powoduje skrócenie zasięgu instrumentu [2, str. 298]
Pomiar rozstawów ścian w wielu przekrojach	zwiększenie dokładności	możliwe błędy przy nieprostokątnym przyłożeniu przymiaru
	wychwycenie szczątkowych lub znacznych nierównoległości ścian	
Podział nieregularnych figur na trapezy lub trójkąty	uniknięcie błędu polegającego na założeniu foremności figury	błąd przy interpretacji punktu załamania skutkuje utratą dokładności pomiaru powierzchni
	podniesienie dokładności oszacowania powierzchni	

## BIBLIOGRAPHY

- [1] Adamczewski Z, *Rachunek wyrównawczy w 15 wykładach*, Warszawa, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 2004, ISBN: 83-7207-469-0
- [2] Klimkowska H, Wróbel A, *Uwagi o wykorzystaniu tachimetrów bezlustrowych w inwentaryzacji architektonicznej*, Stare Jabłonki, Archiwum Fotogrametrii, Kartografii i Teledetekcji, Vol. 16, 2006, ISBN: 78-83-920594-5-X
- [3] Polska norma PN-ISO 9836:1997 *Właściwości użytkowe w budownictwie – Określanie i obliczanie wskaźników powierzchniowych i kubaturowych*
- [4] Polska norma PN-ISO 9836:2015-12 *Właściwości użytkowe w budownictwie – Określanie i obliczanie wskaźników powierzchniowych i kubaturowych*
- [5] Rozporządzenie Ministra Infrastruktury z dnia 12 kwietnia 2002 r. w sprawie warunków technicznych jakie powinny spełniać budynki i ich usytuowanie
- [6] Skórczyński A, *Wykłady z rachunku wyrównawczego i obliczeń geodezyjnych*, wydanie trzecie, Warszawa, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej 1976

## AUTHOR'S NOTE

Graduated from Faculty of Geodesy and Cartography, Warsaw University of Technology, Assistant, Department of Hydrotechnics, Faculty of Civil Engineering and Architecture, West Pomeranian University of Technology Szczecin. Professionally and scientifically connected with engineering and economic geodesy.

## O AUTORZE

Absolwent Wydziału Geodezji i Kartografii Politechniki Warszawskiej, obecnie asystent w Katedrze Budownictwa Wodnego, Wydział Budownictwa i Architektury, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie. Zawodowo i naukowo związany z geodezją inżynierską i gospodarczą.

Kontakt | Contact: [marek.kurnatowski@zut.edu.pl](mailto:marek.kurnatowski@zut.edu.pl)